答案详解(第37~40期)

主编 王 静 终审 李双孝
责编 卢晓丽 照排 董俊英

第40期

2版 《堂堂清》

3.1 等比数列

1.①③⑥； 2.D； 3.C； 4.B； 5.C； 6.$\frac{8}{5}$；

7.C； 8.A； 9.9； 10.–5.

3.2 等比数列的前n项和

1.C； 2.0;3； 3.127； 4.D； 5.B； 6.$\frac{3^{n+1}-3}{2}$；

7.第4项是1,前5项和为$\frac{31}{2}$；

8.±2或–1.

专项练习 等比数列及前n项和的实际应用

1.C； 2.16.11万元； 3.$10a(1.1^{10}-1)$台； 4.24.

3版 同步分层能力测试题(四)

基础练

一、选择题

1~6.BDAACD.

提示:

1.设公比为q,则由$a_1=1,a_3=4$,得$4=1\cdot q^2$,即$q=2$.故该等比数列的前n项和$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.故选B.

2.$\because x,2x+2,3x+3$成等比数列,$\therefore(2x+2)^2=x(3x+3)$,$\therefore x^2+5x+4=0$,$\therefore x=-1$或$x=-4$.又$x=-1$时,$2x+2=0$,故舍去,$\therefore x=-4$,$\therefore$该数列第四项为$-\frac{27}{2}$.故选D.

3.当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$;当$n=1$时,$a_1=S_1=3+a$.因为$\{a_n\}$是等比数列,所以有$3+a=2$,解得$a=-1$.

故选A.

4.由题意知$2\times3a_5=a_6+a_7$,又$\{a_n\}$为正项等比数列,所以$6a_1q^4=a_1q^5+a_1q^6$,且$q>0$,所以$q^2+q-6=0$,

所以$q=2$或$q=-3$(舍).

故选A.

5.$\because a,b,c$成等比数列,$\therefore\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$.

$\therefore\frac{b\sin B}{c}=\frac{a\sin B}{b}=\sin A=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选C.

6.由题得公比$q\neq1$,

$\because 2S_3=S_4+S_5,a_1=1$,$\therefore2\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{1-q^4}{1-q}+\frac{1-q^5}{1-q}$,

化简得$q^2+q-2=0$,解得$q=-2$,则$a_6=(-2)^5=-32$.

故选D.

二、填空题

7.2^{1009}；

8.$1+(\frac{1}{2})^{n-1}$.

提示:

7.根据等比数列的性质可得$a_1a_{2018}=a_2a_{2017}=a_3a_{2016}=\cdots=a_{1009}a_{1010}=2$,$\therefore$这个数列中所有项的乘积为$2^{1009}$.

故答案为2^{1009}.

8.$\because a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$,变形为$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$,

$\therefore$数列$\{a_n-1\}$是等比数列,$a_1-1=1$,公比为$\frac{1}{2}$,$\therefore a_n-1=(\frac{1}{2})^{n-1}$,$\therefore a_n=1+(\frac{1}{2})^{n-1}$.

故答案为$1+(\frac{1}{2})^{n-1}$.

三、解答题

9.解:$\because$成等比数列的三个数的积为27,

$\therefore$可设这三个数为$\frac{3}{q},3,3q$.

又$\because$这三个数的和为13,

$\therefore\frac{3}{q}+3+3q=13$,解得$q=3$,或$q=\frac{1}{3}$.

分别代入计算可得这三个数为:1,3,9或9,3,1.

10.解:(1)因为a_3,m,S_3成等比数列,所以$m^2=a_3\cdot S_3$.因为$a_3=\frac{3}{2},S_3=\frac{9}{2}$,

所以$m^2=\frac{27}{4}$,所以$m=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2)设等比数列的公比为q,当$q=1$时,$a_1=a_2=a_3=\frac{3}{2}$,此时$S_3=\frac{9}{2}$,满足题意;当$q\neq1$时,依题意得$\begin{cases}a_1q^2=\frac{3}{2},\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{9}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=6,\\ q=-\frac{1}{2}.\end{cases}$综上,可得$a_1=\frac{3}{2}$或$a_1=6$.

11.解:(1)因为a_7是a_3与a_9的等比中项,所以$a_7^2=a_3a_9$,即$(a_1+6d)^2=(a_1+2d)(a_1+8d)$.

整理,得$2a_1d+20d^2=0$.

因为$d<0,a_1=20$,所以$d=-2$.

故$a_n=-2n+22$.

(2)(方法一)因为$d=-2,a_1=20$,所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d=-n^2+21n$.

所以$S_n=-(n-\frac{21}{2})^2+(\frac{21}{2})^2$.

当$n=10$或$n=11$时,S_n取得最大值.

故当$n=10$或$n=11$时,S_n取得最大值110.

(方法二)由$a_n\geqslant0$,得$n\leqslant11$.

则当$n=10$或$n=11$时,S_n取得最大值,

且最大值为$11\times20+\frac{11\times10}{2}\times(-2)=110$.

12.证明:(1)$\because S_{n+1}=4a_n+2$,$\therefore S_n=4a_{n-1}+2(n\geqslant2)$,两式相减得$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}(n\geqslant2)$,$\therefore a_{n+1}=4(a_n-a_{n-1})(n\geqslant2)$.

$\because b_n=a_{n+1}-2a_n$,$\therefore b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)=2b_n(n\in\mathbf{N}_+)$,$\therefore\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$,$\therefore$数列$\{b_n\}$是以2为公比的等比数列.

$\because b_1=a_2-2a_1$,而$a_1+a_2=4a_1+2$,$\therefore a_2=3a_1+2=5$,$b_1=5-2=3$,

$\therefore b_n=3\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1),得$C_n=\frac{b_n}{3}=2^{n-1}$,假设$\{C_n+1\}$为等比数列,则有$(C_n+1)^2=(C_{n-1}+1)(C_{n+1}+1)$,$n\geqslant2$,则有$2^{n-2}=0$,与$2^{n-2}\geqslant1$矛盾,所以假设不成立,则原结论成立,即数列$\{C_n+1\}$不可能为等比数列.

提升练

一、选择题

1~6.CBCBCC.

提示:

1.依题意$b_1=1,b_2=3,b_3=9$,故$a_1+a_3+a_9=1+7+25=33$.

故选C.

2.由$\sqrt{a_1^2 2^{m+n-2}}=4a_1$,得$m+n=6$.

故选B.

3.由$a_1q^4(1+q)=a,a_1q^{14}(1+q)=b$,得$a_{25}+a_{26}=a_1q^{24}(1+q)=\frac{b^2}{a}$.

故选C.

4.设等比数列的公比为q,由$a_6=8a_3$,得$q^3=8$,即$q=2$.又$a_1=1$,则$a_n=2^{n-1}$,$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$,则数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是以1为首项、$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,则$T_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.因为$\frac{S_n}{T_n}=32$,

所以$\frac{2^n-1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=32$,解得$n=6$.故选B.

5.$a_{n+1}=3a_n+1$可以化为$(a_{n+1}+\frac{1}{2})=3(a_n+\frac{1}{2})$.

故选C.

6.设原来衣服上的污渍为a,至少要换水洗n次,

因为洗衣服时,换水洗一次能去污30%,

所以要使污渍不高于原来的30%,

则$a(1-30\%)^n\leqslant a\cdot30\%$,即$(\frac{7}{10})^n\leqslant\frac{3}{10}$.

若$n=3$,则有$\frac{343}{1000}>\frac{3}{10}$；

若$n=4$,则有$\frac{2401}{10000}<\frac{3}{10}$,

$\therefore n\geqslant4$.

$\therefore$要使污渍不高于原来的30%,至少要换水洗4次.

故选C.

二、填空题

7.2；

8.15.

提示:

7.由$\frac{a_2a_3a_4}{a_1a_2a_3}=\frac{a_4}{a_1}=q^3=8$,得$q=2$.

8.设等差数列的公差为d,由题意知$d>0$.

$\because a_3,a_4+\frac{5}{2},a_{11}$成等比数列,

$\therefore(a_4+\frac{5}{2})^2=a_3a_{11}$,

$\therefore(\frac{7}{2}+3d)^2=(1+2d)(1+10d)$,即$44d^2-36d-45=0$,

解得$d=\frac{3}{2}$,或$d=-\frac{15}{22}$(舍去).

$\because p-q=10$,则$a_p-a_q=(p-q)d=10\times\frac{3}{2}=15$.

故答案为15.

三、解答题

9.解:(1)因为数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$,即$\frac{1}{a_{n+1}}+1=2(\frac{1}{a_n}+1)$.又$a_1=1$,所以$\frac{1}{a_1}+1=2\neq0$,所以数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是以2为首项,公比为2的等比数列.

(2)由(1),可得$\frac{1}{a_n}+1=2^n$,所以$b_n=(n-1-\lambda)(\frac{1}{a_{n-1}}+1)=(n-1-\lambda)\cdot2^{n-1}(n\geqslant2)$.因为$b_1=-\lambda$符合,所以$b_n=(n-1-\lambda)\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.因为数列$\{b_n\}$是单调递增数列,所以$b_{n+1}>b_n$,即$(n-\lambda)\cdot2^n>(n-1-\lambda)\cdot2^{n-1}$,化为$\lambda<n+1$,所以$\lambda<2$为所求.

10.解:(1)由已知,得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=7,\\ \frac{(a_1+3)+(a_3+4)}{2}=3a_2,\end{cases}$解得$a_2=2$.设数列$\{a_n\}$的公比为$q$,由$a_2=2$,可得$a_1=\frac{2}{q}$,$a_3=2q$.又由$S_3=7$,可知$\frac{2}{q}+2+2q=7$,即$2q^2-5q+2=0$,解得$q=2$,或$q=\frac{1}{2}$.由题意得$q>1$,$\therefore q=2$,$\therefore a_1=1$.故数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=2^{n-1}$.

(2)由于$b_n=\ln a_{2n+1}$,由(1),得$a_{2n+1}=2^{2n}=4^n$,所以$b_n=\ln4^n=n\ln4$.

又$b_{n+1}-b_n=\ln4$,$\therefore\{b_n\}$是等差数列,

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(n+1)\ln4}{2}=n(n+1)\ln2$.

学习报®
高中数学
全国教辅类一级报纸
北师大 必修5
2019–2020
第37~40期
教师用报指南
2020年4月1日
http://www.xuexibao.com
山西出版传媒集团主管 山西三晋报刊传媒集团主办 学习报社编辑出版 总编辑 苗俊青 国内统一刊号 CN14–0708/(F)

第37期

2版 《堂堂清》

1.1 数列的概念

1.B； 2.C； 3.$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$；

4.$-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{9},\frac{1}{16},-\frac{1}{25}$；

5.B； 6.D； 7.C；

8.$\sqrt{6}$； 9.5.

1.2 数列的函数特性

1.B； 2.C； 3.B； 4.$(-\frac{3}{2},+\infty)$； 5.10,1； 6.A.

7.解:$\because a_{2016}=\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\cdots+\frac{1}{2\times2016}$,$a_{2017}=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\cdots+\frac{1}{2\times2016}+\frac{1}{2\times2016+1}+\frac{1}{2\times2017}$,$\therefore a_{2017}-a_{2016}=\frac{1}{2\times2016+1}+\frac{1}{2\times2017}-\frac{1}{2017}=\frac{1}{2\times2016+1}-\frac{1}{2\times2017}>0$.

故$a_{2017}>a_{2016}$.

8.解:(1)假设0.98是它的项,则存在正整数n,满足$\frac{n^2}{n^2+1}=0.98$,$\therefore n^2=0.98n^2+0.98$.

$\because n=7$时成立,$\therefore0.98$是它的项.

(2)$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{2n+1}{[(n+1)^2+1](n^2+1)}>0$,

$\therefore$此数列为递增数列.

专项练习 递推公式

1.D； 2.$a_{n+1}=3a_n+2$； 3.$\frac{1}{2}$； 4.$a_n=\frac{2}{6n-5}$.

5.673； 6.$\frac{n(n+1)}{2}$；

7.解:$\because a_{n+1}=2^na_n$,$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$,当$n\geqslant2$时,$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot2^{n-2}\cdot\cdots\cdot2\times2=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$.

经检验,a_1也符合上述通项公式.

3版 同步分层能力测试题(一)

基础练

一、选择题

1~6.DDBBDC.

提示:

1.根据数列定义,可知D正确.

故选D.

2.数列$1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},3,\cdots,3\sqrt{3}$,可得$a_n=\sqrt{2n-1}$,

则$\sqrt{2n-1}=3\sqrt{3}$,即$2n-1=27$,解得$n=14$.

故选D.

3.由条件可知数列中的项都为正数,且$a_{n+1}=2a_n>a_n$.

故选B.

4.由$f(x)=-2x+1$为递减函数,可得$a_n=-2n+1$为递减数列,故①对,排除D;对$a_n=-n^2+3n+5$,可知$a_1=a_2=7$,所以$a_n=-n^2+3n+5$不是递减数列,排除A,C.

故选B.

5.由题意得,这种树的从第一年的分枝数分别是1,1,2,3,5,…,则2=1+1,3=1+2,5=2+3,

即从第三项起每一项都等于前两项的和,

则3+5=8,8+5=13,13+8=21,13+21=34,34+21=55,

所以第10年树的分枝数是55.

故选D.

6.数列$\{a_n\}$的前5项依次为$\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}$,即数列$\{a_n\}$的前5项依次$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}$,则数列的分母为3,分子为正整数列,故$a_n=\frac{n}{3}$.

故选C.

二、填空题

7.28； 8.$(-\infty,3)$.

提示:

7.设$a_n=An+B$,则有$a_3=3A+B=7$,

$a_7=7A+B=19$,所以$A=3,B=-2$,

即$a_n=3n-2$,所以$a_{10}=3\times10-2=28$.

8.因为$a_n=(n-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}_+)$,$\{a_n\}$是递增数列,所以$a_{n+1}-a_n=2^n(n+2-\lambda)>0$,所以$n>\lambda-2$,所以$\lambda<n+2$,所以$\lambda<3$.故答案为$(-\infty,3)$.

三、解答题

9.解:据题意,可知$a_1=1,a_2=1+\frac{1}{a_1}=2,a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{3}{2}$,$a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{3},a_5=\frac{8}{5}$.

10.解:(1)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$,

等价为$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$,

则对应的通项公式为$a_n=\frac{n^2}{2},n\in\mathbf{N}_+$.

(2)3,5,9,17,33,….

等价为2+1,4+1,8+1,16+1,32+1,…,

则对应的通项公式为$a_n=2^n+1,n\in\mathbf{N}_+$.

11.解:由已知,得$a_2=pa_1+q=p+q=3$,①

$a_3=pa_2+q=3p+q$,

$a_4=pa_3+q=p(3p+q)+q=15$.②

联立①②两式,得$p^2+p-6=0$,

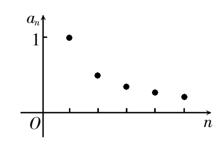
解得$\begin{cases}p=-3,\\ q=6,\end{cases}$或$\begin{cases}p=2,\\ q=1.\end{cases}$

12.解:(1)$a_1=1,a_2=\frac{1}{1+1}\times1=\frac{1}{2}$,

$a_3=\frac{2}{1+2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},a_4=\frac{3}{1+3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4},a_5=\frac{4}{1+4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.

(2)猜想:$a_n=\frac{1}{n}$.

(3)图像如下图所示:



提升练

一、选择题

1~6.BDADBB.

提示:

1.数列若用图像表示,从图像上不可以是线段,只能是一群孤立的点,①错,排除A,C;数列的项数可以是有限的,如数列1,2,3,故②错,排除D.

故选B.

2.数列$\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{5}{6},-\frac{7}{8},\cdots$的通项公式为$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}$,$\therefore a_{14}=(-1)^{14-1}\cdot\frac{27}{28}=-\frac{27}{28}$.

故选D.

3.若$a_{n+1}\geqslant a_n$成立,则函数$a_n=n^2+kn+2$,在$n\in\mathbf{N}_+$上为增函数,则对称轴$-\frac{k}{2}\leqslant\frac{3}{2}$即可,即$k\geqslant-3$,

故选A.

4.因为$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$,由$\frac{1}{2}n(n+1)\leqslant100$,得$n$的最大值为13,即最后一个13是数列的第91项,而14共有14项,所以第100项应为14.

故选D.

5.$\because a_1=2,a_{n+1}=a_n+2n$,$\therefore a_{n+1}-a_n=2n$,

$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\times1+2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2=n^2-n+2$,$\therefore a_{100}=100^2-100+2=9902$.

故选B.

6.由0,2,4,8,12,18,…,50,可得该数列偶数项的通项公式为$a_n=2n^2$,则此数列的第20项为$2\times10^2=200$.

故选B.

二、填空题

7.$\frac{41}{17}$；

8.$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)$.

提示:

7.$a_2=2+\frac{1}{1}=3,a_3=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},a_4=2+\frac{3}{7}=\frac{17}{7},a_5=2+\frac{7}{17}=\frac{41}{17}$.

8.根据题意,对于数列$\{a_n\}$:2,–6,12,–20,30,–42,…,

则$a_1=(-1)^2\times1\times2=2$,

$a_2=(-1)^3\times2\times3=-6$,

$a_3=(-1)^4\times3\times4=12$,

……

归纳可得:$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)$.

故答案为:$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)$.

三、解答题

9.解:(1)$a_n=28+3n-n^2=-(n-\frac{3}{2})^2+\frac{121}{4}$,

可得$n=1$或2时,a_1或a_2最大,$a_1=28+3-1=30$.

(2)$a_n>0$,$28+3n-n^2>0$,

$\therefore(n-7)(n+4)<0$,

解得$n<7$.

使得$a_n>0$的项有6项.

10.解:(1)由$f(x)=\log_2x-\frac{1}{\log_2x}$,得$f(2^{a_n})=a_n-\frac{1}{a_n}=2n$.所以$a_n^2-2na_n-1=0$,解得$a_n=n\pm\sqrt{n^2+1}$.因为$0<x<1$,所以$0<2^{a_n}<1$,所以$a_n<0$.故$a_n=n-\sqrt{n^2+1}$.

(2)$\because a_{n+1}-a_n=n+1-\sqrt{(n+1)^2+1}-n+\sqrt{n^2+1}=\sqrt{n^2+1}+1-\sqrt{n^2+2n+2}=\frac{(\sqrt{n^2+1}+1-\sqrt{n^2+2n+2})(\sqrt{n^2+1}+1+\sqrt{n^2+2n+2})}{\sqrt{n^2+1}+1+\sqrt{n^2+2n+2}}$

$=\frac{2\sqrt{n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2+1}+1+\sqrt{n^2+2n+2}}>0$,

$\therefore$数列$\{a_n\}$是递增数列.

第38期

2版 《堂堂清》

2.1 等差数列的概念

1.A; 2.②③; 3.A;
4.A; 5.B; 6.22.

2.1 等差数列的通项公式

1.B; 2.C; 3.C; 4.4;
5.1007; 6.$a_1=1$,$d=4$;
7.$a_{15}=-2$; 8.$a_n=2n-3$.

2.1 等差数列的性质

1.C; 2.D; 3.A; 4.C; 5.B;
6.D; 7.B; 8.B; 9.D; 10.30.

3版 同步分层能力测试题(二)

基础练

一、选择题

1~6.DCACBA.

提示:

1.数列$\{a_n\}$为等差数列,公差为-1,所以$a_4=a_1+3d=1-3=-2$.故选D.

2.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,$\because 4a_3+a_{11}-3a_5=10$,
$\therefore 4(a_1+2d)+(a_1+10d)-3(a_1+4d)=10$,
即$a_1+3d=5$,则$a_4=5$.
故选C.

3.在等差数列$\{a_n\}$中,由$a_1=13$,$a_5<0$,得$\begin{cases}a_4=13+3d\geqslant0,\\a_5=13+4d<0,\end{cases}$得$-\frac{13}{3}\leqslant d<-\frac{13}{4}$.$\because$公差$d$为整数,$\therefore d=-4$.故选A.

4.$a_1+a_{10}=a_3+a_8=20$,
故选C.

5.因为$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=5(a_1+a_{10})=5(a_5+a_6)=30$,$\therefore a_5+a_6=6$.故选B.

6.$\because$数列$\{a_n\}$中,$a_2=3$,$a_5=1$,且数列$\{\frac{1}{a_n+1}\}$是等差数列,$\therefore$数列$\{\frac{1}{a_n+1}\}$的公差$d=\frac{\frac{1}{1+1}-\frac{1}{3+1}}{5-2}=\frac{1}{12}$,$\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{3+1}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$,$\therefore\frac{1}{a_8+1}=\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$,解得$a_8=\frac{1}{3}$.
故选A.

二、填空题

7.4;
8.1.

提示:

7.$\because 1,a,b,c,9$成等差数列,$\therefore 2a=1+b$,$2c=9+b$,
$\therefore 2c-2a=9-1=8$,$\therefore c-a=4$.即答案为4.

8.设$\{a_n\}$的公差为d,首项为a_1,根据题意得$\begin{cases}a_1+a_1+2d+a_1+4d=105,\\a_1+d+a_1+3d+a_1+5d=99,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a_1=39,\\d=-2,\end{cases}$ $\therefore a_{20}=a_1+19d=1$.故答案为1.

三、解答题

9.解:$\because\{a_n\}$为等差数列,
$\therefore a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$,即有$5a_5=450$,
$\therefore a_5=90$,$\therefore a_2+a_8=2a_5=180$.

10.解:(1)设三个数依次为$a-d$,a,$a+d$,
由已知条件得$(a-d)+a+(a+d)=18$,
解得$a=6$.
又由$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116$,得$3a^2+2d^2=116$,
解得$d=\pm2$.
当$d=2$时,这三个数构成的等差数列为4,6,8;
当$d=-2$时,这三个数构成的等差数列为8,6,4.
(2)由(1),知这三个数构成的积为$4\times6\times8=192$.

11.解:(1)设公差为$d(d>0)$,且$BC=x$,则$AB=x-d$,$CD=x+d$.

依题意,得$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=21,\\(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=179,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=7,\\d=4.\end{cases}$

故$AB=3$cm,$BC=7$cm,$CD=11$cm.

(2)正方形的边长组成以3为首项,公差为4的等差数列$\{a_n\}$,
$\therefore a_{10}=3+(10-1)\times4=39$,得$a_{10}^2=1521$.
故所求正方形的面积为1521cm^2.

12.解:因为$\{\frac{a_n+\lambda}{3^n}\}$为等差数列,所以$\frac{a_{n+1}+\lambda}{3^{n+1}}-\frac{a_n+\lambda}{3^n}=d$,$d$为常数.因为$a_{n+1}=3a_n+3^n-8(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$\frac{3a_n+3^n-8+\lambda}{3^{n+1}}-\frac{a_n+\lambda}{3^n}=d$,则左边$=\frac{3a_n+3^n-8+\lambda-(3a_n+3\lambda)}{3^{n+1}}=\frac{3^n-8-2\lambda}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{-8-2\lambda}{3^{n+1}}$为常数,则$-8-2\lambda=0$,解得$\lambda=-4$.

提升练

一、选择题

1~6.AACDCB.

提示:

1.$\because$在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_7=a_2+a_8=8$,
$\therefore a_2+a_8=2a_5=8$,解得$a_5=4$,
$(a_3+a_7)^2-a_5=(2a_5)^2-a_5=64-4=60$.
故选A.

2.令a_1为首项,d为公差,则$a_n=a_1+(n-1)d$,有$-a_n=-a_1-(n-1)d=-a_1+(n-1)(-d)$,可知$\{-a_n\}$也是等差数列.
故选A.

3.$\because$在等差数列$\{a_n\}$中,$a_6+a_8+a_{10}=72$,$\therefore a_6+a_8+a_{10}=3a_8=72$,$\therefore a_8=24$,$\therefore 2a_{10}-a_{12}=2(a_1+9d)-(a_1+11d)=a_1+7d=a_8=24$.
故选C.

4.由$a_9=a_1+8d\leqslant1$,$a_{10}=a_1+9d>1$,得$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$.
故选D.

5.由数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$为等差数列,可知$\{a_n+b_n\}$也为等差数列.
又$a_1+b_1=a_5+b_5=100$,$\therefore\{a_n+b_n\}$为常数列,且$a_n+b_n=100$,
$\therefore a_{2018}+b_{2018}=100$.
故选C.

6.一年有二十四个节气,每相邻两个节气之间的日影长度差为$99\frac{1}{6}$分,且"冬至"时日影长度最大,为1350分;"夏至"时日影长度最小,为160分,$\therefore 1350+12d=160$,解得$d=-\frac{1190}{12}$,

$\therefore$"立春"时日影长度为$1350+(-\frac{1190}{12})\times3=1052\frac{1}{2}$(分).
故选B.

二、填空题

7.15;
8.8.

提示:

7.由$a_3+a_{15}=6$,得所求式$=\frac{5}{2}(a_3+a_{15})=15$.

8.$a_3+a_6+a_{10}+a_{13}=32$,即$(a_3+a_{13})+(a_6+a_{10})=32$,根据等差数列的性质得$2a_8+2a_8=32$,即$a_8=8$,$\therefore m=8$时,$a_m=8$.故答案为8.

三、解答题

9.解:(1)$a_1=f(m-1)=(m-1)^2-2(m-1)-3=m^2-4m$,$a_3=m^2-2m-3$.
$\because a_1,a_2,a_3$成等差数列,
$\therefore 2a_2=a_1+a_3$,即$2\times(-\frac{3}{2})=(m^2-4m)+(m^2-2m-3)$,解得$m=0$,或$m=3$.

(2)当$m=0$时,$a_3=f(0)=-3$,公差$d=a_3-a_2=-3-(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}$.

$\therefore a_n=-\frac{3}{2}+(n-2)\cdot(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}(n-1)$.

当$m=3$时,$a_3=f(3)=0$,公差$d=a_3-a_2=0-(-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$,

$\therefore a_n=-\frac{3}{2}+(n-2)\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(n-3)$.

10.解:(1)$\because a_1\neq0$,且有$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$,所以$a_n\neq0(n\in\mathbf{N}_+)$,则有$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}=b_n+\frac{1}{2}$,即$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$,
且$b_1=\frac{1}{a_1}=1$,

所以$\{b_n\}$是首项为1,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)由(1),知$b_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$,即$\frac{1}{a_n}=\frac{n+1}{2}$,所以$a_n=\frac{2}{n+1}$.

第39期

2版 《堂堂清》

2.2 a_n与S_n的关系

1.15; 2.D; 3.B; 4.$a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\2n-3,n\geqslant2;\end{cases}$ 5.39;

6.解:(1)证明:当$n=1$时,$a_1=S_1=\frac{1}{4}a_1^2+\frac{1}{2}a_1-\frac{3}{4}$,解得$a_1=3$或$a_1=-1$(舍去).

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_n^2+2a_n-3)-\frac{1}{4}(a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3)$,
$\therefore 4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$,即$(a_n+a_{n-1})\cdot(a_n-a_{n-1}-2)=0$.
$\because a_n+a_{n-1}>0$,$\therefore a_n-a_{n-1}-2=0$,$\therefore a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$.
$\therefore$数列$\{a_n\}$是以3为首项,2为公差的等差数列.
(2)由(1)知,$a_1=3$,$d=2$,$\therefore a_n=3+2(n-1)=2n+1$.

2.2 等差数列的前n项和

1.D; 2.④; 3.C; 4.B; 5.A; 6.$d=2$,$n=8$.

2.2 等差数列前n项和的性质

1.C; 2.A; 3.B; 4.D; 5.6.

2.2 等差数列前n项和的应用

1.285; 2.35500; 3.D; 4.B;

5.$f(x)=0.1n^2+0.6n+14.4$;到2022年初时该辆轿车的总使用费用为19.9万元.

3版 同步分层能力测试题(三)

基础练

一、选择题

1~6.CBCBAC.

提示:

1.$S_{10}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})=-3\times(1+2+3+4+5)=-45$.
故选C.

2.因为$S_{25}=\frac{25}{2}(a_1+a_{25})=25a_{13}=100$,
$\therefore a_{13}=4$,
$\therefore a_{12}+a_{14}=2a_{13}=8$.
故选B.

3.$\because a_2+a_8+a_{11}=(a_1+d)+(a_1+7d)+(a_1+10d)=3(a_1+6d)=3a_7$,且$a_2+a_8+a_{11}$为定值,$\therefore a_7$也为定值.
又$S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7$,$\therefore S_{13}$也为定值.
故选C.

4.$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8=\frac{15}{4}\pi$,
$\therefore a_8=\frac{\pi}{4}$.
$\therefore\tan(a_7+a_8+a_9)=\tan(3a_8)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.
故选B.

5.由$a_n=2n+3$,得$\{a_n\}$为等差数列,$\therefore S_n=\frac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$,得$a=1$,$b=4$,$c=0$.
故选A.

6.等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\because S_{20}>0$,$S_{21}<0$,$\therefore\frac{(a_1+a_{20})20}{2}>0$,$\frac{(a_1+a_{21})21}{2}=21a_{11}<0$,即$a_{11}<0$.

$\therefore a_{11}+a_{10}>0$,$a_{10}>0$,$\therefore$数列$\{\frac{S_n}{a_n}\}$中,前10项都为正数,第11项为负,且当$n\leqslant10$时,分子$S_n$是递增的正数,分母$a_n$是递减的正数,$\therefore$第10项$\frac{S_{10}}{a_{10}}$最大.故选C.

二、填空题

7.11;
8.②④.

提示:

7.$a_1+a_5=S_1+S_5-S_4=2+26-17=11$.故答案为11.

8.由题意可得$a_1=-4d$,则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}(n^2-9n)$.

三、解答题

9.解:(1)由等差数列的性质,可得$\begin{cases}3a_1+3d=0,\\5a_1+\frac{5\times4d}{2}=-5,\end{cases}$
解得$a_1=1$,$d=-1$,
则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=1-(n-1)=2-n$.
(2)$\because\{a_n\}$为等差数列,
$\therefore a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n+1}$是以1为首项,以$-3$为公差的等差数列,$\therefore a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n+1}=n+1+\frac{(n+1)(n+1-1)\times(-3)}{2}=\frac{(n+1)(2-3n)}{2}$.

10.解:(1)由$a_3+a_4=84-a_5$,得$a_4=28$.
再由$\begin{cases}a_1+3d=28,\\a_1+7d=36,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=22,\\d=2,\end{cases}$
即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=22+(n-1)\cdot2=2n+20$.
(2)由(1),得$S_n=22n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2=n^2+21n$,
$\therefore S_n-41n=n^2+21n-41n=n^2-20n=(n-10)^2-100$.
$\therefore$当$n=10$时,S_n-41n取得最小值-100.

11.解:(1)设n分钟后第一次相遇,依题意,得$2n+\frac{n(n-1)}{2}+5n=70$,整理得$n^2+13n-140=0$,解得$n=7$,$n=-20$(舍去).故第一次相遇的时间为7分钟.
(2)依题意,有$3s=20\times2+\frac{20\times(20-1)}{2}+5\times20=330$,得$s=110$m.

12.解:(1)设数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,依题意可知$a_2=a_1+d=4$,$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=30$,解得$a_1=2$,$d=2$,
故$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\cdot2=2n(n\in\mathbf{N}_+)$.
(2)因为$S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$,
所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,
所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

提升练

一、选择题

1~6.BACBAA.

提示:

1.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$\begin{cases}a_1+6d=1,\\10a_1+\frac{10\times9}{2}d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=\frac{1}{3}.\end{cases}$
故选B.

2.由$S_{11}=-5\times11+\frac{11\times10}{2}d=55$,得$d=2$.
由$S_{11}-a_k=55-a_1-(k-1)d=50$,解得$k=6$.
故选A.

3.当$n\leqslant3$时,$a_n\leqslant0$,$b_n=|a_n|=-a_n=6-2n$,即$b_1=4$,$b_2=2$,$b_3=0$;
当$n>3$时,$a_n>0$,$b_n=|a_n|=a_n=2n-6$,即$b_4=2$,$b_5=4$,$b_6=6$,$b_7=8$.
所以数列$\{b_n\}$的前7项和为$4+2+0+2+4+6+8=26$.
故选C.

4.$\because S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5$,$T_9=\frac{9(b_1+b_9)}{2}=9b_5$,$\therefore a_5=\frac{1}{9}S_9$,$b_5=\frac{1}{9}T_9$.又当$n=9$时,$\frac{S_9}{T_9}=\frac{2\times9}{3\times9+1}=\frac{9}{14}$,则$\frac{a_5}{b_5}=\frac{\frac{1}{9}S_9}{\frac{1}{9}T_9}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{9}{14}$.故选B.

5.$\because$等差数列$\{a_n\}$当且仅当$n=5$时S_n取得最大值,
$\therefore a_5=10+4d>0$,$a_6=10+5d<0$,解得$-\frac{5}{2}<d<-2$.
$\therefore d$的取值范围为$-\frac{5}{2}<d<-2$.
故选A.

6.由$a_1=1$,设公差为d,则$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$,$\therefore\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nd}{2}-\frac{(n-1)d}{2}=\frac{d}{2}$,$\therefore\frac{S_{2019}}{2019}-\frac{S_{2017}}{2017}=1=d$,所以$d=1$,所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d=n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot1=\frac{n(n+1)}{2}$,$\therefore\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$.

所以数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前2019项的和为$2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020})=2(1-\frac{1}{2020})=\frac{2019}{1010}$.故选A.

二、填空题

7.30; 8.2.

提示:

7.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,$\because a_1+a_3+a_5=15$,$a_2+a_4+a_6=0$,$\therefore 3d=-15$,$3a_1+6d=15$,解得$d=-5$,$a_1=15$.
$\therefore a_n=15-5(n-1)=20-5n$.
由$\begin{cases}a_n=20-5n\geqslant0,\\a_{n+1}=15-5n\leqslant0,\end{cases}$解得$3\leqslant n\leqslant4$.
则S_n的最大值为$S_3=S_4=3\times15+\frac{3\times2}{2}\times(-5)=30$.
故答案为30.

8.易求得$a_n=\begin{cases}4,\quad n=1,\\2n,\ n\geqslant2.\end{cases}$

三、解答题

9.解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$\begin{cases}a_1+a_3=8,\\a_6+a_{12}=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_1+2d=8,\\a_1+5d+a_1+11d=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$ $\therefore a_n=2+(n-1)\cdot2=2n$,
$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n$.
(2)由(1)知$a_n=2n$,$\therefore b_{n+1}=a_{n+1}-2a_n=2(n+1)-2\times2n=-2n+2$,$\therefore b_n=-2(n-1)+2=-2n+4$.
又$\because b_1=2$适合上式,$\therefore b_n=-2n+4(n\in\mathbf{N}_+)$.
又$\because b_{n+1}-b_n=-2n+2-(-2n+4)=-2$,$\therefore$数列$\{b_n\}$是首项为2,公差为$-2$的等差数列,
$\therefore S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)=2n-n^2+n=-n^2+3n$.

10.解:(1)$\because a_1,a_5$是方程$x^2-16x+60=0$的两根,
$\therefore a_1+a_5=16$.
又$\because$等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=9$,
$\therefore(9-d)+(9+3d)=16$,即$d=-1$.
$\therefore a_n=a_2+(n-2)d=11-n$.
(2)由(1)可知$S_n=\frac{n(10+11-n)}{2}=\frac{-n^2+21n}{2}=-\frac{1}{2}(n-\frac{21}{2})^2+\frac{441}{8}$,
故当$n=10$或11时,数列$\{a_n\}$的前n项的和S_n最大,
且最大值为$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}+\frac{441}{8}=55$.
(3)由(2)知数列$\{a_n\}$的前10或11项的和最大,
$\therefore$当$n\leqslant11$时,$T_n=S_n=\frac{-n^2+21n}{2}$;
当$n\geqslant12$时,$T_n=2S_{11}-S_n=110-\frac{-n^2+21n}{2}$.
综上所述,数列$\{|a_n|\}$的前n项和$T_n=\begin{cases}\frac{-n^2+21n}{2},\quad n\leqslant11,\\110-\frac{-n^2+21n}{2},n\geqslant12.\end{cases}$