（上接第3版）

2.四棱锥$P-ABCD$中，所有棱长均为2，O是底面正方形$ABCD$的中心，E为PC的中点，则直线OE与直线PD所成角为（　　）.

A.30°　　B.60°

C.45°　　D.90°

3.三个互不重合的平面把空间分成六个部分时，它们的交线有（　　）.

A.1条　　B.2条

C.3条　　D.1条或2条

4.（山东省临沂市罗庄区2018~2019学年高二上学期期末）如图7，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2$，$AD=1$，点E，F，G分别是DD_1，AB，CC_1的中点，则异面直线A_1E与GF所成的角是（　　）.

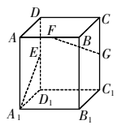


图7

A.90°　　B.60°

C.45°　　D.30°

5.（河南省信阳市2018~2019学年高二上学期期末）直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BCA=90°$，M，N分别是A_1B_1，A_1C_1的中点，$BC=CA=2CC_1$，则BM与AN所成的角为（　　）.

A.30°　　B.45°

C.60°　　D.90°

6.（浙江省台州市2018~2019学年高二上学期期末）如图8，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$为梯形，$AB//DC$，则在面PBC内（　　）.

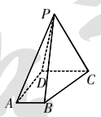


图8

A.一定存在与CD平行的直线

B.一定存在与AD平行的直线

C.一定存在与AD垂直的直线

D.不存在与CD垂直的直线

二、填空题（本大题共2小题，每小题5分，共10分）

7.在棱长为1的正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，异面直线$A'D$与AB'所成角的大小是_____.

8.一条直线l和直线l外的三点所确定的平面个数是_____.

三、解答题（本大题共2小题，共24分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（12分）已知正四棱锥$S-ABCD$的所有棱长均为2，若E为棱SC的中点，求异面直线BE与SA所成角的正切值.

10.（12分）如图9，已知A是$\triangle BCD$所在平面外一点，M，N分别是$\triangle ABC$和$\triangle ACD$的重心，且$BD=6$.

（1）求MN的长；

（2）若点A的位置发生变化，MN的位置和长度会改变吗？

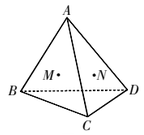


图9

（上接第1版）

01 平面的基本性质

（1）公理1的作用

第一个作用是判定直线在平面内；第二个作用是判定点在平面内，即如果直线上两点在平面内，则直线上所有点都在平面内.

（2）公理2的作用

第一个作用是确定平面；第二个作用是可用其证明点、线共面问题.

（3）公理2的三个推论

推论1：经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论2：经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论3：经过两条平行直线有且只有一个平面.

①作为推论，需要利用公理给出严格的证明，与平面几何的证明一样，证明立体几何问题的一般步骤是：

第一步：根据题意作图，写出已知、求证；

第二步：写出证明过程.

②对于“有且只有”型命题的证明，要从“有”和“只有”两方面证明，即既证明存在性——“有”，又证明唯一性——“只有”.

（4）公理3的作用

第一个作用是判定两平面相交；第二个作用是判定点在直线上，即问“点是什么点，线是什么线”，点是某两个平面的公共点，线是这两个平面的公共直线，则这个点在这条直线上；第三个作用是它是画两个平面相交时画交线的依据.

（二）思维导图解读

02 公理4和定理

（1）公理4

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

我们也将这个公理称为平行公理，根据平行公理可知：直线间平行的传递性在空间也是成立的.

（2）定理

定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

要正确运用等角定理，必须抓住“角的两边分别对应平行”这个条件.

【说明】①定理是用于证明空间两个角相等的判定定理，它是平面几何中的等角定理在空间中的推广.

②定理解决了角在空间中经过平移后大小不变的问题，为两条异面直线所成的角及二面角的平面角的定义提供了理论依据，保证了其大小的唯一性.

③如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

03 异面直线

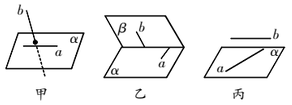
（1）对异面直线定义理解需注意的问题

①“不同在任何一个平面内”，指这两条直线永不具备确定平面的条件，因此，异面直线既不相交，也不平行，要注意把握异面直线的不共面性.

②不能把异面直线误解为：分别在不同平面内的两条直线为异面直线.

（2）异面直线的画法

画异面直线时，为了充分显示出它们既不平行又不相交，也不共面的特点，常常需要以辅助平面作为衬托，以加强直观性，如下图中的甲、乙、丙三种情形.



（3）异面直线的判定方法

①定义法（不易操作）.

②定理法：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

③反证法：先假设两条直线不是异面直线，即两直线平行或相交，由假设的条件出发，经过严密的推理，导出矛盾，从而否定假设，肯定两条直线异面.

❖印刷/河南豫晋印务有限公司　地址/郑州市管城区金岱工业园区　❖本报四开四版　❖订阅/全国各地邮局（所）　❖单价1.25元　学期定价30.00元

学习报
高中数学

《必修2》编辑进度

出版时间：2020.1
期数：4期
内容：
13期　空间几何体的结构，空间几何体的三视图和直观图
14期　空间几何体（柱体、锥体、台体）的表面积与体积
15期　空间点、直线、平面之间的位置关系
16期　直线、平面平行的判定及其性质

出版时间：2020.2
期数：4期
内容：
17期　直线、平面垂直的判定及其性质
18期　直线的倾斜角与斜率，直线的方程
19期　直线的交点坐标与距离公式
20期　第三章章节复习

出版时间：2020.3
期数：4期
内容：
21期　圆的方程，直线与圆的位置关系
22期　圆与圆的位置关系，空间直角坐标系
23期　第四章章节复习
24期　必修2总复习：各章知识梳理、复习导航、综合性问题、综合能力测试题

用稿声明

《学习报》是一份多学科、多层次、多角度面向全国大中小学生及教育工作者的教辅类报纸。本报的办报方针是“紧扣课标及教材，针对年级特点和学科特色同步辅导”。本报旨在拓宽学生阅读视野，激发学习兴趣，培养高尚的人格和高雅的情趣，提升综合能力。本报诚征各学科各类教育、教辅稿件，撰稿、荐稿者请注意以下事项：

1.稿件一经采用，即视为同意将网络传播权及电子发行的权利授予本报。本报一次性支付的稿酬已包含上述授权的使用费。

2.推荐或稿件中选用他人文章时，请务必注明原稿件作者姓名和选文出处，否则不予刊登。若原出版者注明“未经许可，不得转载”，请勿推荐，来稿一律不收。推荐类稿件一经采用，本报将依据《中华人民共和国著作权法》之规定给原作者和推荐者奉寄稿酬和样报。

3.由于部分作者通讯地址不详，见报后请与我报及时联系，以便奉寄稿酬和样报。

电话：0351-3239626（总编办）或请与各编辑部联系咨询

关注公众号可在网上商城直接订阅《学习报》及相关产品

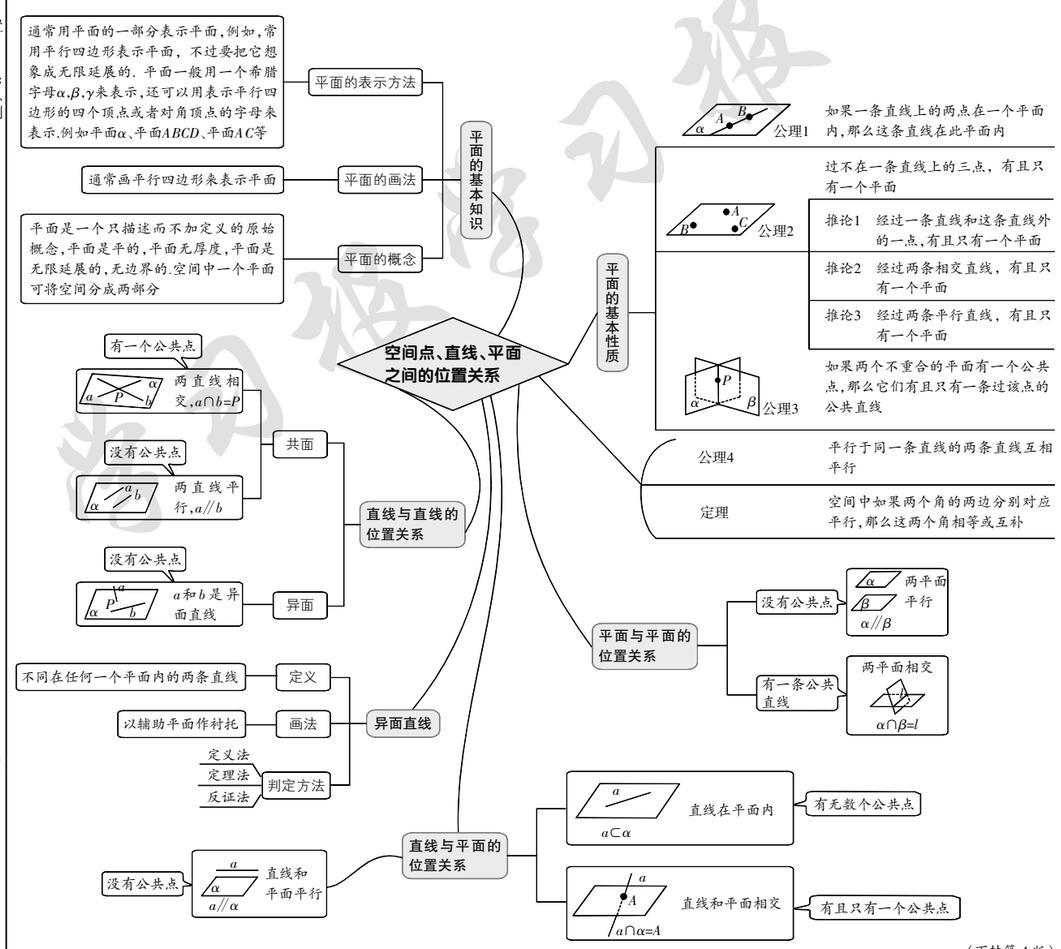
学习报®
高中数学
全国教辅类一级报纸
人教A　必修2
2019-2020
第15期
总第1591期
2020年1月15日
http://www.xuexibao.com
山西出版传媒集团主管　山西三晋报刊传媒集团主办　学习报社编辑出版　总编辑　苗俊青　国内统一刊号　CN14-0708/(F)

传道授业

空间点、直线、平面之间的位置关系

★山西　康银娥

（一）思维导图



（下转第4版）

❖广告经营许可证号/1400004000044　❖本报向全国各省（市）级教研员赠报，欢迎来电咨询　❖随时征订热线/0351-3239622　邮政订户服务热线/0351-3239623

§2.1.1 平面

1.下列命题中,真命题的个数是(　　).

(1)两条直线可以确定一个平面;

(2)若点$A\in\alpha$,$A\in\beta$,$\alpha\cap\beta=l$,则$A\in l$;

(3)如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面重合;

(4)在空间中,相交于同一点的三条直线在同一平面内.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2.空间三条直线互相平行,由每两条平行线确定一个平面,则可确定平面的个数为(　　).

A.3　　B.1或2　　C.1或3　　D.2或3

3.在空间四边形各边AB,BC,CD,DA上分别取点E,F,G,H四点,如果EF,GH交于一点P,则点P(　　).

A.一定在直线BD上

B.一定在直线AC上

C.在直线AC或BD上

D.既不在直线AC上,也不在直线BD上

4.下列图形中不一定是平面图形的是(　　).

A.三角形　　B.四个角都相等的四边形

C.梯形　　D.平行四边形

5.正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,P,Q,R分别为AB,AD,B_1C_1的中点,那么正方体过P,Q,R的截面图形是(　　).

A.三角形　　B.四边形

C.五边形　　D.六边形

6.(安徽省马鞍山市2017~2018学年度第一学期学业水平测试)两两相交的三条直线可确定_____个平面.

7.根据下列符号表示的语句,说明点、线、面之间的位置关系,并画出相应的图形:

(1)$A\in\alpha$,$B\notin\alpha$;

(2)$l\subset\alpha$,$m\cap\alpha=A$,$A\notin l$;

(3)$P\in l$,$P\notin\alpha$,$Q\in l$,$Q\in\alpha$.

1.正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,与对角线AC_1异面的棱有(　　).

A.3条　　B.4条　　C.6条　　D.8条

2.已知a,b是异面直线,直线c平行于直线a,那么c与b(　　).

A.一定是异面直线　　B.一定是相交直线

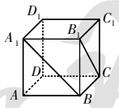
C.不可能是平行直线　　D.不可能是相交直线

3.下列命题中正确命题的个数为(　　).

(1)垂直于同一条直线的两直线平行;(2)无公共点的两条直线异面;(3)两条异面直线无公共点;(4)两条异面直线可以同时平行于一条直线.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4.如图所示的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,异面直线A_1B与B_1C所成的角是(　　).



A.30°　　B.45°

C.60°　　D.90°

5.异面直线a和b所成的角为θ,则θ的范围是(　　).

A.(0°,90°)　　B.(0°,180°)

C.(0°,90°]　　D.(0°,180°]

6.两条异面直线在同一个平面上的射影不可能是(　　).

A.两条平行直线

B.两条相交的直线

C.一条直线与直线外一个点

D.一条直线

§2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系

7.长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,$AB=1$,$AD=2$,$AA_1=3$,则异面直线A_1B_1与AC_1所成角的余弦值为(　　).

A.$\frac{\sqrt{14}}{14}$　　B.$\frac{\sqrt{192}}{14}$

C.$\frac{\sqrt{13}}{13}$　　D.$\frac{1}{3}$

8.在空间四边形$ABCD$中,$AD=BC=2$,E,F分别为AB,CD的中点,$EF=\sqrt{3}$,求AD与BC所成角的大小.

§2.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系

1.已知平面α和直线l,则α内至少有一条直线与l(　　).

A.平行　　B.相交

C.垂直　　D.异面

2.若直线a和b是异面直线,$a\subset$平面β,则直线b和平面β的位置关系是(　　).

A.平行　　B.相交

C.平行或相交　　D.$b\subset\beta$

3.若$a/\!/b$,且a与平面α相交,那么直线b与平面α的位置关系是(　　).

A.必相交

B.有可能平行

C.一定平行

D.在平面内

4.下列命题中真命题的个数为(　　).

(1)若直线l平行于平面α内无数条直线,则$l/\!/\alpha$;

(2)若直线a在平面α外,则$a/\!/\alpha$;

(3)若直线$a/\!/b$,直线$b\subset\alpha$,则$a/\!/\alpha$;

(4)若直线$a/\!/b$,直线$b\subset\alpha$,那么直线a就平行于平面α内的无数条直线.

A.1　　B.2

C.3　　D.4

5.已知点$A\in$直线a,又$A\in$平面α,则(　　).

A.$a\not\subset\alpha$　　B.$a\cap\alpha=A$

C.$a\subset\alpha$　　D.$a\cap\alpha=A$或$a\subset\alpha$

6.在梯形$ABCD$中,$AB/\!/CD$,$AB\subset$平面α,$CD\not\subset$平面α,则直线CD与平面α内的直线的位置关系只能是(　　).

A.平行

B.平行或异面

C.平行或相交

D.异面或相交

1.四棱柱的的六个面中,平行平面有(　　).

A.1对

B.1对或2对

C.1对或2对或3对

D.0对或1对或2对或3对

2.如果两个平面内分别有一条直线,且这两条直线互相平行,则这两个平面的位置关系一定是(　　).

A.平行　　B.相交

C.平行或相交　　D.垂直相交

3.若夹在两个平面外的三条平行线段相等,那么这两个平面的位置关系是(　　).

A.平行　　B.相交

C.重合　　D.平行或相交

§2.1.4 平面与平面之间的位置关系

4.两个不重合的平面,可以将空间划为几个部分?

学习报 高中数学

栏目设置

第一版　悟·提能力

本版主要栏目:

传道授业:对本期的知识学生应该怎样去学习才能理解的更到位更准确,(1)讲解一些对课本上难以理解的知识点,(2)课本外的但在课堂上需要补充的知识,(3)关于本期内容前后衔接的一些知识点的介绍。

高屋建瓴:对于基础知识涉及到的基础方法应该怎么用,结合适当的例题讲解,让大多数学生达到轻松掌握基本知识及其解法的目的。

答疑解惑:通过师生问答的形式,将对本期知识中有疑问的地方解惑,使学生能在轻松的气氛中掌握知识。

思想方法:针对当期知识点,根据新课标所要求学生掌握的常用数学思想方法进行重点启发与培养,以帮助学生形成良好的数学思维习惯。

茅塞顿开:通过例题的求解过程,阐述解题策略及思路的形成过程。目的在于培养学生自主学习的能力,以及对问题的深入掌握。

一击即破:针对有些问题的一些特殊的巧妙的方法解析,侧重在传统思路基础上的巧与妙,重点在思考上。

举一反三:以课本典型例题或习题为主,对其背景、限制条件、设问方式等进行变换探究,使同学们能够打开视野,触类旁通。

知行合一:立足于数学知识在实际生产和生活中的应用,以及在其他学科领域中的应用,把实际问题转化为数学模型来讲求解,以期达到知行合一的目的。

金榜题名:针对某个知识点在高考中的题型进行回顾、展望,并探求其求解策略及技巧,让学生提前了解并熟悉高考的相关题型。

运筹帷幄:对于本期基础知识涉及到的基础方法应该怎么用,结合适当的例题讲解,化难为易,让大多数学生达到轻松掌握基本知识及其解法的目的。或剖析对某个知识点与其他知识点的交汇综合,追求思路方法的拓展性,目的在于培养学生完整的知识系统。

毫厘千里:对各种典型的错题进行归类,提炼出针对某类错误的解题策略。将常考、易错和能举一反三的典型试题按专题分类,帮学生掌握考点,做少量的题,掌握一类题的典型解法。

妙趣横生:从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发,拓宽学生的知识视野,以增加数学学习的趣味性。

数学文化:以数学发展史为主,展示丰富多彩的数学文化,使读者体会到数学是人类智慧的结晶,并从中受到启迪,开拓思路。

第二版　练·堂堂清

堂堂清:通过课时分类中对应的基础题型训练,让学生了解所学内容在考试中的考查方式,以什么形式、题材来设计问题。

第三、四版　练·周周清

同步分层能力测试题:紧跟教学进度,不可使用历年高考原题,可采用一部分高考或竞赛改编题(改编题请标明出处)。

章节能力测试题:对整章内容的综合测试。

模块综合能力测试题:对对应模块所有知识点的综合测试。

同步分层能力测试题 三

(测试范围:空间点、直线、平面之间的位置关系)

基础练

时间:45分钟　满分:86分

素养名称	数学抽象	逻辑推理	数学运算	直观想象	数学建模	数据分析
题号			5,6,11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12		

一、选择题(本大题共6小题,每小题5分,共30分)

1.异面直线是指(　　).

A.空间中两条不相交的直线

B.平面内的一条直线与平面外的一条直线

C.分别位于两个不同平面内的两条直线

D.不同在任何一个平面内的两条直线

2.(河南省豫南九校联考2018~2019学年高一上学期期末)同学们,当你任意摆放手中笔的时候,那么桌面所在的平面内一定存在直线与笔所在的直线(　　).

A.平行　　B.相交

C.异面　　D.垂直

3.过直线l外两点作与直线l平行的平面,可以作(　　).

A.1个

B.1个或无数个

C.0个或无数个

D.0个、1个或无数个

4.(安徽省蚌埠市2018~2019学年高二上学期期末学业水平检测)空间中有三条线段AB,BC,CD,且$\angle ABC=\angle BCD$,那么直线AB与CD的位置关系是(　　).

A.平行

B.异面

C.相交或平行

D.平行或异面或相交均有可能

5.(广东省清远市2018~2019学年高一上学期期末)在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,异面直线AD_1和B_1C所成的角是(　　).

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.90°

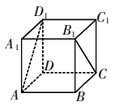


图1

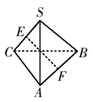


图2

6.如图2,在四面体$SABC$中,$SB\perp AC$,$SB=AC=2$,E,F分别是SC和AB的中点,则EF的长为(　　).

A.1　　B.$\sqrt{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

二、填空题(本大题共2小题,每小题5分,共10分)

7.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的各条棱中,与直线AA_1异面的棱有_____条.

8.下列说法正确的是_____.(填上所有正确命题的序号)

①空间三点确定一个平面;②两条相交直线确定一个平面;③一点和一条直线确定一个平面;④一条直线与两条平行线中的一条相交,则必与另一条相交.

三、解答题(本大题共4小题,共46分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

9.(10分)在梯形$ABCD$中,$AB/\!/CD$,E,F分别为BC和AD的中点,将平面$CDFE$沿EF翻折起来,使CD到$C'D'$的位置,G,H分别为AD'和BC'的中点,求证:四边形$EFGH$为平行四边形.

10.(12分)用符号语言表示图3、图4、图5中几何元素之间的位置关系.

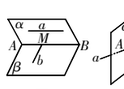


图3

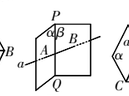


图4

图5

11.(12分)空间四边形$SABC$的边及对角线长相等,E,F分别是AB,SC的中点,求直线EF与SA所成的角.

12.(12分)如图6,已知平面$\alpha\cap\beta=l$,点$A\in\alpha$,点$B\in\alpha$,点$C\in\beta$,且$A\notin l$,$B\notin l$,直线AB与l不平行,那么平面ABC与平面β的交线与l有什么关系?证明你的结论.

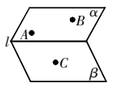


图6

提升练

时间:45分钟　满分:64分

素养名称	数学抽象	逻辑推理	数学运算	直观想象	数学建模	数据分析
题号			2,4,5,7,9,10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10		

一、选择题(本大题共6小题,每小题5分,共30分)

1.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,与对角线BC_1异面的棱有(　　).

A.3条　　B.4条

C.6条　　D.8条

(下转第4版)

主编 王 静 终审 李双孝
责编 陈记梅 照排 仇晓凤

（上接第3版）

提升练

时间：45分钟 满分：64分

素养名称	数学抽象	逻辑推理	数学运算	直观想象	数学建模	数据分析
题号			5,6,10	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10		

一、选择题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

1.（辽宁省凌源市三校联考2018~2019学年高一上学期期末）设α,β表示两个不同平面，m表示一条直线，下列命题正确的是（　　）.

A.若$m/\!/\alpha,\alpha/\!/\beta$，则$m/\!/\beta$

B.若$m/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则$\alpha/\!/\beta$

C.若$m\subset\alpha,\alpha/\!/\beta$，则$m/\!/\beta$

D.若$m\subset\alpha,m/\!/\beta$，则$\alpha/\!/\beta$

2.已知直线l_1,l_2，平面α，$l_1/\!/l_2,l_1/\!/\alpha$，那么l_2与平面α的关系是（　　）.

A.$l_1/\!/\alpha$　　B.$l_2\subset\alpha$

C.$l_2/\!/\alpha$或$l_2\subset\alpha$　　D.l_2与α相交

3.如图7，已知四边形$ABCD$是正方形，$\triangle ABP$，$\triangle BCQ$，$\triangle CDR$，$\triangle DAS$都是等边三角形，E,F,G,H分别是线段AP,DS,CQ,BQ的中点，分别以AB,BC,CD,DA为折痕将四个等边三角形折起，使得P,Q,R,S四点重合于一点P，得到一个四棱锥. 对于下面四个结论：

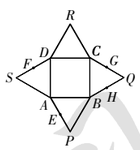


图7

①EF与GH为异面直线；

②直线EF与直线PB所成的角为60°；

③$EF/\!/$平面PBC；

④平面$EFGH/\!/$平面$ABCD$.

其中正确结论的个数有（　　）.

A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

4.如图8，已知三个平面$\alpha,\beta,\gamma,\alpha/\!/\beta/\!/\gamma,a,b$是异面直线，$a$与$\alpha,\beta,\gamma$分别交于$A,B,C$三点，$b$与$\alpha,\beta,\gamma$分别交于$D,E,F$三点，连接$AF$交平面$\beta$于$G$，连接$CD$交平面$\beta$于$H$，则四边形$BGEH$的形状为（　　）.

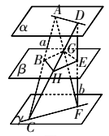


图8

A.平行四边形

B.矩形

C.菱形

D.梯形

5.（湖北省仙桃市、天门市、潜江市2018~2019学年高二（上）期末）平面α过正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A，$\alpha/\!/$平面CB_1D_1，$\alpha\cap$平面$ABCD=m$，则直线m与直线BC所成角的正弦值为（　　）.

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.1　　D.$\frac{1}{2}$

6.（北京市丰台区2018~2019学年高二上学期期末）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$DA=DC=1$，$DD_1=2$，分别在对角线A_1D,CD_1上取点M,N，使得直线$MN/\!/$平面A_1ACC_1，则线段MN长的最小值为（　　）.

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.2

二、填空题（本大题共2小题，每小题5分，共10分）

7.若命题"如果平面α内有三点到平面β的距离相等，那么$\alpha/\!/\beta$"为真命题，则此三点必须满足的条件是_____.

8.如图9所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G,H分别为棱CC_1,C_1D_1,D_1D,CD的中点，N是BC的中点，点M在四边形$EFGH$及其内部运动，则当M满足_____时，有$MN/\!/$平面B_1BDD_1.

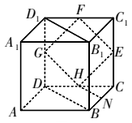


图9

三、解答题（本大题共2小题，共24分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

9.（12分）如图10，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，已知E,F,G,H分别是AB,AC,A_1B_1,A_1C_1的中点，求证：

（1）B,C,H,G四点共面；

（2）平面$EFA_1/\!/$平面$BCHG$.

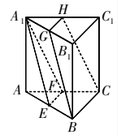


图10

10.（12分）如图11，在底面是菱形的四棱锥$P-ABCD$中，$\angle ABC=60°$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点E在PD上，且$PE:ED=2:1$. 问在棱PC上是否存在一点F，使$BF/\!/$平面AEC？证明你的结论.

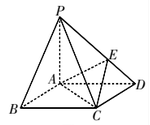


图11

余音绕梁

谨记"三常想" 线面平行不再愁

□河北　乔建基

常想一、由线面平行的性质定理或公理4找平行

例1　图1是一个长方体截去一个角所得多面体的直观图（E,F,G分别是所在边的中点）. 在所给直观图中连接BC'，求证：$BC'/\!/$平面EFG.

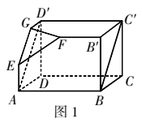


图1

分析：读懂直观图中的线面位置关系是解决本题的关键.

证明：连接AD'，则$AD'/\!/BC'$.

因为E,G分别为其所在边的中点，

所以$AD'/\!/EG$，从而$EG/\!/BC'$.

又$EG\subset$平面EFG，$BC'\not\subset$平面EFG，所以$BC'/\!/$平面EFG.

常想二、由比例线段的性质或三角形的中位线找平行

例2　已知空间四边形$ABCD$，P,Q分别是$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的重心，求证：$PQ/\!/$平面ACD.

分析：由P,Q分别是$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的重心，易想到用重心的性质寻找在平面ACD内，且与PQ平行的直线. 根据题意，只需取BC的中点即可.

证明：如图2，取BC的中点E，连接AE,DE.

$\because P,Q$分别为$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的重心，

$\therefore P,Q$分别在AE,DE上，且$AP:AE=DQ:DE=2:3$.

$\therefore$在$\triangle AED$中，$PQ/\!/AD$.

又$AD\subset$平面ACD，$PQ\not\subset$平面ACD，$\therefore PQ/\!/$平面ACD.

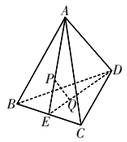


图2

常想三、在平行四边形中找平行

例3　如图3，已知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别是面对角线AB_1,BC_1上的点，且$\frac{B_1M}{MA}=\frac{C_1N}{NB}$，求证：$MN/\!/$平面$ABCD$.

分析：在图中过M,N分别在平面ABB_1A_1、平面BCC_1B_1中作BB_1的平行线来构造平行四边形，从而找到所需的直线.

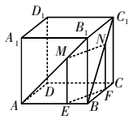


图3

证明：由正方体的性质，可知$AB_1=BC_1$.

又$\frac{B_1M}{MA}=\frac{C_1N}{NB}$，所以$AM=BN$.

如图3所示，在平面ABB_1A_1内，作$ME/\!/BB_1$，在平面BCC_1B_1内，作$NF/\!/BB_1$，根据公理4，可知$ME/\!/NF$.

又在Rt$\triangle AME$与Rt$\triangle BNF$中，$AM=BN$，$\angle MAE=\angle NBF$，$\therefore ME=NF$，$\therefore$四边形$MNFE$是平行四边形.

根据平行四边形的性质，可知$EF/\!/MN$.

又$EF\subset$平面$ABCD$，$MN\not\subset$平面$ABCD$，

所以$MN/\!/$平面$ABCD$.

学习报 高中数学

《必修2》编辑进度

出版时间：2020.1
期数：4期
内容：
13期　空间几何体的结构，空间几何体的三视图和直观图
14期　空间几何体（柱体、锥体、台体）的表面积与体积
15期　空间点、直线、平面之间的位置关系
16期　直线、平面平行的判定及其性质

出版时间：2020.2
期数：4期
内容：
17期　直线、平面垂直的判定及其性质
18期　直线的倾斜角与斜率，直线的方程
19期　直线的交点坐标与距离公式
20期　第三章章节复习

出版时间：2020.3
期数：4期
内容：
21期　圆的方程，直线与圆的位置关系
22期　圆与圆的位置关系，空间直角坐标系
23期　第四章章节复习
24期　必修2总复习：各章知识梳理、复习导航、综合性问题、综合能力测试题

用稿声明

《学习报》是一份多学科、多层次、多角度面向全国大中小学生及教育工作者的教辅类报纸。本报的办报方针是"紧扣课标及教材，针对年级特点和学科特色同步辅导"。本报旨在拓宽学生阅读视野，激发学习兴趣，培养高尚的人格和高雅的情趣，提升综合能力。本报诚征各学科各类教育、教辅稿件，撰稿、荐稿者请注意以下事项：

1.稿件一经采用，即视为同意将网络传播权及电子发行的权利授予本报。本报一次性支付的稿酬已包含上述授权的使用费。

2.推荐或稿件中选用他人文章时，请务必注明原稿件作者姓名和选文出处，否则不予刊登。若原出版者注明"未经许可，不得转载"，请勿推荐，来稿一律不收。推荐类稿件一经采用，本报将依据《中华人民共和国著作权法》之规定给原作者和推荐者奉寄稿酬和样报。

3.由于部分作者通讯地址不详，见报后请与我报及时联系，以便奉寄稿酬和样报。

电话：0351-3239626（总编办）或请与各编辑部联系咨询

关注公众号可在网上商城直接订阅《学习报》及相关产品

学习报® 高中数学
全国教辅类一级报纸
人教A 必修2
2019-2020
第16期
总第1592期
2020年1月22日
http://www.xuexibao.com
山西出版传媒集团主管　山西三晋报刊传媒集团主办　学习报社编辑出版　总编辑 苗俊青　国内统一刊号 CN14-0708/(F)

传道授业

解读 直线、平面平行的判定及其性质

★山西　康银娥

01 直线与平面平行的判定

（1）直线与平面平行的判定定理：平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线和此平面平行（即线线平行，则线面平行）.

（2）符号语言表示如下：

若$a/\!/b,a\not\subset\alpha,b\subset\alpha$，则$a/\!/\alpha$.

（3）该定理的图形语言如图1.

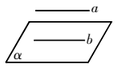


图1

（4）使用本定理的前提条件：使用这个判定定理判定一条直线与平面平行，应先确定这条直线在平面之外，再使用该定理判定.

注意　在应用线面平行判定定理进行证明时，对于直线a不在平面α内，直线b在平面α内，都要给出充分的证明，如果只靠主观判断，没有足够的依据，证明就不能成立.

02 直线与平面平行的性质

（1）直线与平面平行的性质定理：一条直线和一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行（即线面平行，则线线平行）

（2）用符号表示如下：

若$a/\!/\alpha,a\subset\beta,\alpha\cap\beta=b$，则$a/\!/b$.

（3）该性质的图形语言如图2.

图2

（4）理解定理，要注意以下几点：

性质定理可以作为直线和直线平行的判定方法，$\alpha/\!/\beta,a\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\beta$.

这就是说：如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任意直线均平行于另一个平面.

（2）两个平面平行的性质定理

①定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

②符号语言表示如下：

若$\alpha/\!/\beta,\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b$，则$a/\!/b$.

③该定理的图形语言如图4.

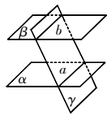
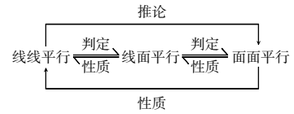


图4

（3）面面平行的性质定理给出了证明线线平行的一个方法，而通过线线平行的证明可以实现线面平行、面面平行的判定，可见空间中的平行关系可互相转化.

【小结】空间中平行关系的相互转化



03 两个平面平行的判定

（1）两个平面平行的判定定理

①两个平面平行的判定定理：一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

②符号语言表示如下：

若$a\subset\beta,b\subset\beta,a\cap b=A$，且$a/\!/\alpha,b/\!/\alpha$，则$\beta/\!/\alpha$.

③该定理的图形语言如图3.

图3

（2）推论

推论1：如果一个平面内有两相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行.

推论2：平行于同一个平面的两个平面平行.

04 两个平面平行的性质

（1）我们根据两个平面平行及直线和平面平行的定义，容易得到下面结论：

定理中有三个条件：①直线a和平面α平行，即$a/\!/\alpha$；②平面α,β相交，即$\alpha\cap\beta=b$；③直线b在平面β内，即$b\subset\beta$，这三个条件缺一不可.

性质定理的用途是证明线线平行.

感悟平行关系

★山东　李文杰

一、直线与平面平行的判定与性质

例1　若一条直线与两个相交平面都平行，则这条直线与这两个平面的交线平行.

将其转化为符号语言为：已知$\alpha\cap\beta=l,a/\!/\alpha,a/\!/\beta$，求证：$a/\!/l$.

分析：利用直线与平面平行的性质定理作辅助平面进行过渡，然后利用判定定理进行证明.

证明：如图1，$\because a/\!/\alpha$，过a作平面γ，使得$\gamma\cap\alpha=b$，

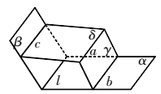


图1

$\therefore$由线面平行的性质定理可知$a/\!/b$.

又$a/\!/\beta$，过a作平面δ，使得$\delta\cap\beta=c$，

由线面平行的性质定理可知$a/\!/c$，$\therefore b/\!/c$.

又已知$c\subset\beta,b\not\subset\beta$，$\therefore b/\!/\beta$.

又$\because b\subset\alpha,\alpha\cap\beta=l$，$\therefore b/\!/l$，$\therefore a/\!/l$.

特别提示：在立体几何中，作辅助平面是做证明题时常用的技巧与方法，应重点掌握. 如在利用判定定理证明线面平行时，最容易忽略"平面外一条直线"这一条件，要避免此错误的出现，关键是明确：与平面α内的直线b平行的直线l和平面α存在这样两种位置关系：$l/\!/\alpha$和$l\subset\alpha$，即不仅有平行而且还有在平面内的情况.

二、平面与平面平行的判定与性质

例2　如图2，在四棱锥$O-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，M为OA的中点，N为BC的中点，求证：$MN/\!/$平面OCD.

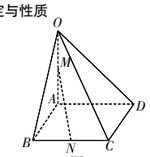


图2

分析：欲证直线$MN/\!/$平面OCD，只需证明包含MN的平面与平面OCD平行，而欲证包含MN的平面与平面OCD平行，只需证明包含MN的平面内有两条相交直线与平面OCD内的两条相交直线分别平行.

证明：如图3，取OB的中点E，连接ME,NE.

$\because M,E$分别为OA,OB的中点，

$\therefore ME/\!/AB$.

又$AB/\!/CD$，$\therefore ME/\!/CD$.

同理可证$EN/\!/$平面OCD.

$\because CD\subset$平面OCD，$ME\not\subset$平面OCD，

$\therefore ME/\!/$平面OCD.

又$\because ME\cap NE=E$，

$\therefore$平面$MNE/\!/$平面OCD.

$\because MN\subset$平面MNE，$\therefore MN/\!/$平面OCD.

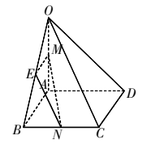


图3

特别提示：把"线线平行"转化为"面面平行"，又把"面面平行"转化为"线面平行"，实现这些转化是证明本题的关键.（1）两个平面平行的判定定理的条件中的两直线相交很重要，在解题中它常常被忽视.（2）两个平面的位置关系是空间各种元素位置关系的"最高境界"，解决空间两个平面的位置关系问题的思维方法是"以退为进"，即将面面问题退证为线面问题，再退证为线线问题，充分揭示了面面、线面、线线问题的相互联系.

❖印刷/河南豫晋印务有限公司　地址/郑州市管城区金岱工业园区　❖本报四开四版　❖订阅/全国各地邮局（所）　❖单价 1.25元　学期定价 30.00元
❖广告经营许可证号/1400004000044　❖本报向全国各省（市）级教研员赠报，欢迎来电咨询　❖随时征订热线 / 0351-3239622　邮政订户服务热线 / 0351-3239623

§2.2.1 直线与平面平行的判定

1.下列命题中正确的个数是(　　).

①若$b\subset\alpha$,$a/\!/b$,则$a/\!/\alpha$;②若$a/\!/\alpha$,$b\subset\alpha$,则$a/\!/b$;③若$a/\!/b$,$a/\!/\alpha$,则$b/\!/\alpha$;④若$a/\!/\alpha$,$b/\!/\alpha$,则$a/\!/b$.

A.0　　B.1

C.2　　D.3

2.过正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$任意两条棱的中点作的直线中与平面DBB_1D_1平行的直线共有(　　).

A.4条　　B.6条

C.8条　　D.12条

3.在空间四边形$ABCD$中,E,F分别为AB,AD上的点,且$AE:EB=AF:FD=1:4$,又H,G分别是BC,CD的中点,则(　　).

A.$BD/\!/$平面EFG,且四边形$EFGH$是平行四边形

B.$HG/\!/$平面ABD,且四边形$EFGH$是平行四边形

C.$EF/\!/$平面BCD,且四边形$EFGH$是梯形

D.$EH/\!/$平面ADC,且四边形$EFGH$是梯形

4.如图1,空间四边形$ABCD$中,E,F分别是AB,AD的中点,求证:$EF/\!/$平面BCD.

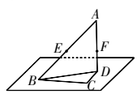


图1

5.如图2,在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,D是BC的中点,判断直线A_1B与平面ADC_1的位置关系.

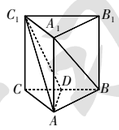


图2

§2.2.2 平面与平面平行的判定

1.可以作为平面$\alpha/\!/$平面β的条件是(　　).

A.存在一条直线a,$a/\!/\alpha$,$\alpha/\!/\beta$

B.存在一条直线a,$a\subset\alpha$,$a/\!/\beta$

C.存在两条平行直线a,b,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$a/\!/\beta$,$b/\!/a$

D.存在两条异面直线a,b,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$a/\!/\beta$,$b/\!/\alpha$

2.经过平面α外的一条直线a且与平面α平行的平面(　　).

A.有且只有一个　　B.不存在

C.至多有一个　　D.至少有一个

3.设α,β是两个不同的平面,m是直线且$m\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,若使$\alpha/\!/\beta$成立,则需增加条件(　　).

A.n是直线且$n\subset\alpha$,$m/\!/\beta$

B.n,m是异面直线,$n/\!/\beta$

C.n,m是相交直线且$n\subset\alpha$,$n/\!/\beta$

D.n,m是平行直线且$n\subset\alpha$,$n/\!/\beta$

4.如果两个平面分别经过两条平行线中的一条,则这两个平面的位置关系是_____.

5.若两个平面都平行于两条异面直线中的每一条,则这两平面的位置关系是_____.

6.如图3,正方体$ABCD-A'B'C'D'$中,M,N,E,F分别是棱$A'B'$,$A'D'$,$B'C'$,$C'D'$的中点,求证:平面$AMN/\!/$平面$EFDB$.

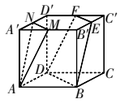


图3

§2.2.3 直线与平面平行的性质

1.a,b,c表示直线,α表示平面,可以确定$a/\!/b$的条件是(　　).

A.$a/\!/\alpha$,$b\subset\alpha$

B.$a/\!/c$,$c/\!/b$

C.$a/\!/\alpha$,$b/\!/\alpha$

D.a,b和c的夹角相等

2.下列命题中正确的命题有(　　).

①若两个不重合的平面不相交,则它们平行;

②若一个平面内有无数条直线都平行与另一个平面,则这两个平面平行;

③空间两个相等的角所在的平面平行.

A.0个　　B.1个

C.2个　　D.3个

3.设三条互相平行的直线a,b,c中,$a\subset\alpha$,$a\not\subset\beta$,$b\subset\beta$,$c\subset\beta$,则α与β的关系是(　　).

A.相交　　B.平行

C.平行或相交　　D.平行、相交或重合

4.在三棱锥$A-BCD$中,E,F,G,H分别是AB,BC,CD,DA上的点,当$BD/\!/$平面$EFGH$时,下面结论正确的是(　　).

A.E,F,G,H一定是各边的中点

B.G,H一定CD,DA是的中点

C.$BE:EA=BF:FC$,且$DH:HA=DG:GC$

D.$AE:EB=AH:HD$,且$BF:FC=DG:GC$

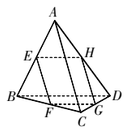


图4

5.若a和b是异面直线,则经过b可作_____个平面与直线a平行.

6.如图5所示的一块木料中,棱BC平行于平面$A'B'C'D'$.

(1)要经过平面$A'B'C'D'$内的一点P和棱BC将木料锯开,应怎样画线?

(2)所画的线与平面$ABCD$是什么位置关系?

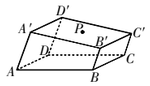


图5

§2.2.4 平面与平面平行的性质

1.下列命题错误的是(　　).

A.平行于同一条直线的两个平面平行或相交

B.平行于同一个平面的两个平面平行

C.平行于同一条直线的两条直线平行

D.平行于同一个平面的两条直线平行或相交

2.下列命题中正确的是(　　).

①夹在两个平行平面间的相等线段必平行;

②夹在两个平行平面间的平行线段的长相等;

③两个平面到一条直线的距离相等,则两个平面平行.

A.①②　　B.①③　　C.②③　　D.②

3.a,b,c为三条不重合的直线,α,β,γ为三个不重合的平面,现给出四个命题:

①$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\gamma\\ b/\!/\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/b$;　②$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/c\\ \beta/\!/c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$;

③$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/\gamma\\ \beta/\!/\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$;　④$\left.\begin{matrix}\alpha/\!/c\\ a/\!/c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/a$.

其中正确的是(　　).

A.①②　　B.③④

C.③　　D.②③

4.如图6,平面$\alpha/\!/$平面β,A,$C\in\alpha$,B,$D\in\beta$,点E,F分别在线段AB,CD上,且$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$,求证:$EF/\!/$平面$\beta$.

图6

学习报 高中数学

栏目设置

第一版 悟·提能力

本版主要栏目:

传道授业:对本期的知识学生应该怎样去学习才能理解的更到位更准确,(1)讲解一些对课本上难以理解的知识点,(2)课本外的但在课堂上需要补充的知识,(3)关于本期内容前后衔接的一些知识点的介绍。

高屋建瓴:对于基础知识涉及到的基础方法应该怎么用,结合适当的例题讲解,让大多数学生达到轻松掌握基本知识及其解法的目的。

答疑解惑:通过师生问答的形式,将对本期知识中有疑问的地方解惑,使学生能在轻松的气氛中掌握知识。

思想方法:针对当期知识点,根据新课标所要求学生掌握的常用数学思想方法进行重点启发与培养,以帮助学生形成良好的数学思维习惯。

茅塞顿开:通过例题的求解过程,阐述解题策略及思路的形成过程。目的在于培养学生自主学习的能力,以及对问题的深入掌握。

一击即破:针对有些问题的一些特殊的巧妙的方法解析,侧重在传统思路基础上的巧与妙,重点在思考上。

举一反三:以课本典型例题或习题为主,对其背景、限制条件、设问方式等进行变换探究,使同学们能够打开视野,触类旁通。

知行合一:立足于数学知识在实际生产和生活中的应用,以及在其他学科领域中的应用,把实际问题转化为数学模型来讲求解,以期达到知行合一的目的。

金榜题名:针对某个知识点在高考中的题型进行回顾、展望,并探求其求解策略及技巧,让学生提前了解并熟悉高考的相关题型。

运筹帷幄:对于本期基础知识涉及到的基础方法应该怎么用,结合适当的例题讲解,化难为易,让大多数学生达到轻松掌握基本知识及其解法的目的。或剖析对某个知识点与其他知识点的交汇综合,追求思路方法的拓展性,目的在于培养学生完整的知识系统。

毫厘千里:对各种典型的错题进行归类,提炼出针对某类错误的解题策略。将常考、易错和能举一反三的典型试题按专题分类,帮学生掌握考点,做少量的题,掌握一类题的典型解法。

妙趣横生:从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发,拓宽学生的知识视野,以增加数学学习的趣味性。

数学文化:以数学发展史为主,展示丰富多彩的数学文化,使读者体会到数学是人类智慧的结晶,并从中受到启迪,开拓思路。

第二版 练·堂堂清

堂堂清:通过课时分类中对应的基础题型训练,让学生了解所学内容在考试中的考查方式,以什么形式、题材来设计问题。

第三、四版 练·周周清

同步分层能力测试题:紧跟教学进度,不可使用历年高考原题,可采用一部分高考或竞赛改编题(改编题请标明出处)。

章节能力测试题:对整章内容的综合测试。

模块综合能力测试题:对对应模块所有知识点的综合测试。

同步分层能力测试题 四

(测试范围:直线、平面平行的判定及其性质)

基础练

时间:45分钟　满分:86分

素养名称	数学抽象	逻辑推理	数学运算	直观想象	数学建模	数据分析
题号			5,12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12		

一、选择题(本大题共6小题,每小题5分,共30分)

1.若平面α截三棱锥所得截面为平行四边形,则该三棱锥与平面α平行的棱有(　　).

A.0条　　B.1条　　C.2条　　D.3条

2.(四川省内江市2018~2019学年高二上学期期末)已知a,b,c是直线,β是平面,给出下列命题:

①若$a\perp b$,$b\perp c$,则$a/\!/c$;

②若$a/\!/b$,$b\perp c$,则$a\perp c$;

③若$a/\!/\beta$,$b\subset\beta$,则$a/\!/b$;

④若a与b异面,且$a/\!/\beta$,则b与β相交;

其中真命题的个数是(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.(河南省豫南九校联考2018~2019学年高一上学期期末)如图1,在四面体$ABCD$中,截面$PQMN$是正方形,则在下列命题中,错误的是(　　).

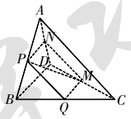


图1

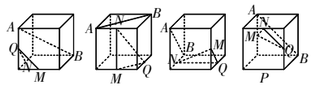
A.$AC\perp BD$

B.$AC/\!/$截面$PQMN$

C.$AC=BD$

D.异面直线PM与BD所成的角为45°

4.在下列四个正方体中,A,B为正方体的两个顶点,M,N,Q分别为所在棱的中点,则在这四个正方体中,直线AB与平面MNQ不平行的是(　　).



A　　B　　C　　D

5.已知平面$\alpha/\!/$平面β,$P\in\alpha$,$P\in\beta$,过点P的两条直线分别交α,β于A,B和C,D四点,A,$C\in\alpha$,B,$D\in\beta$,且$PA=6$,$AB=2$,$BD=12$,则AC的长为(　　).

A.10或18　　B.9

C.18或9　　D.6

6.(湖北省仙桃市、天门市、潜江市2018~2019学年高二(上)期末)如图2所示,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E是棱CC_1的中点,F是侧面BCC_1B_1内的动点,且$A_1F/\!/$平面D_1AE,给出下列命题:

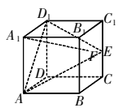


图2

①点F的轨迹是一条线段;

②A_1F与D_1E不可能平行;

③A_1F与BE是异面直线;

④平面AFC_1不可能与平面AED_1平行.

其中正确的个数是(　　).

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

二、填空题(本大题共2小题,每小题5分,共10分)

7.如图3,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,若M是A_1D_1的中点,则直线MD与平面A_1ACC_1的位置关系是_____.

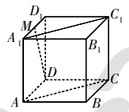


图3

8.已知平面α和β,在平面α内任取一条直线a,在β内总存在直线$b/\!/a$,则α与β的位置关系是_____.

三、解答题(本大题共4小题,共46分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

9.(10分)如图4所示,四棱锥$S-ABCD$中,底面$ABCD$为平行四边形,E是SA上的一点,求:当点E满足什么条件时,$SC/\!/$平面EBD.

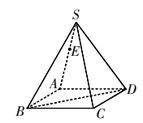


图4

10.(12分)在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,已知E,F,G分别是CB,CD,CC_1的中点,求证:平面$AB_1D_1/\!/$平面EFG.

11.(12分)(重庆市江津中学、合川中学等七校2018~2019学年高二上学期期末)如图5所示,在四棱锥$C-ABED$中,四边形$ABED$是正方形,点G,F分别是线段EC,BD的中点.

(1)求证:$GF/\!/$平面ABC.

(2)线段BC上是否存在一点H,使得面$GFH/\!/$面ACD,若存在,请找出点H并证明;若不存在,请说明理由.

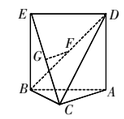


图5

12.(12分)如图6,四边形$ABCD$为正方形,点P到平面$ABCD$的距离为PD,$PD=DC=2$,点E,F分别为AD,PC的中点.

(1)证明:$DF/\!/$平面PBE;

(2)求点F到平面PBE的距离.

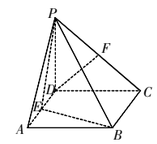


图6

(下转第4版)